



TITLE:

投資家の効用を組み込んだポート フォリオインシュアランス (不確実 ・不確定環境下における数理的意 思決定とその周辺)

AUTHOR(S):

齋藤, 高人; 宮崎, 浩一; 山本, 隆広

CITATION:

齋藤, 高人 ...[et al]. 投資家の効用を組み込んだポートフォリオインシュアランス (不確実・不確定環境下における数理的意思想決定とその周辺). 数理解析研究所講究録 2012, 1802: 242-248

ISSUE DATE:

2012-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194331>

RIGHT:

投資家の効用を組み込んだポートフォリオインシュアランス¹

電気通信大学 齋藤 高人(Takahito Saito) 宮崎 浩一(Koichi Miyazaki) 山本 隆広(Takahiro Yamamoto)

University of Electro-Communications

1. はじめに

2007 年のサブプライムローン問題を発端とする金融危機以降、資産運用を行う際に以前に増してリスクを管理する重要性が高まっている。そのため、資産運用において、如何にポートフォリオが値下がるリスク（ダウンスイドリスク）を限定しつつ、リターンを高めるかが重要なテーマとなっている。本研究では、数あるダウンスイドリスクを限定する戦略の中でも、ポートフォリオインシュアランス（Portfolio Insurance, 以下、PI と呼ぶ）という戦略に注目する。PI は、市場環境の変化に合わせてリスク資産と安全資産の配分比率を動的に変更する投資戦略であり、保有するポートフォリオの値上がる可能性を維持しつつ、ダウンスイドリスクを限定することを目的としている。PI の代表的な戦略として、Option-Based Portfolio Insurance (OBPI, Leland and Rubinstein[5]) と、Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI, Perold[7], Black and Jones[1]) がある。OBPI は、リスク資産と安全資産のポートフォリオで、オプションのペイオフを模倣する戦略である。投資期間を設定することでオプションのペイオフを仮定し、デルタヘッジを用いてダウンスイドリスクを限定する。一方 CPPI は、目標損失限度額（フロア）とレバレッジの大きさ（レバレッジ乗数）を定め、ポートフォリオの価値がフロアを上回る部分にレバレッジをかけた金額をリスク資産に投資し、それ以外を安全資産に投資する戦略である。

本研究では、後者の CPPI を取り上げる。CPPI の特長として、OBPI と違い投資期間終了時のペイオフを仮定せずに運用可能なこと、そして 2 つのパラメータ（フロアとレバレッジ乗数）のみで資産配分比率を決定できることなどがある。CPPI を用いたポートフォリオのパフォーマンス比較は、Perold and Sharpe[8], Cesari and Cremonini[2]などにおいて行われている。これらの研究では、シミュレーションによりさまざまな市場環境を想定した上で、CPPI を用いたポートフォリオの期待リターンやダウンスイドリスクの大きさがどのように変化するかを検証しており、多くの市場環境で CPPI の有用性を確認している。しかし、実際には投資家ごとにポートフォリオに望む期待リターンと許容できるダウンスイドリスクの大きさが異なるため、投資家ごとに適した CPPI を提案する必要があると考えられる。そこで本研究では、投資家の効用に注目する。まず、先行研究に倣い株価プロセスを幾何ブラウン運動でモデル化し、市場環境を表現できるようなパラメータセットを与え、CPPI のシミュレーション分析を行う。そして、市場環境、CPPI のパラメータの違いによって、ポートフォリオの期待リターン・ダウンスイドリスクの大きさがどのように変化するかを検証する。その後、非対称な効用関数を用いて投資家のリスク選好を表現し、市場環境、投資家のリスク選好の違いといった観点から効用最大化が達成される CPPI のパラメータを検証する。

本論文の構成は以下の通りである。次章では、CPPI を用いた動的資産配分法について説明する。3 章では、投資家の効用について述べ、効用関数とリスク選好について説明する。4 章では、シミュレーション分析の手法と結果を示すことで、投資家ごとに効用最大化となる CPPI のパラメータについて考察する。最終章ではまとめと結語を付す。

¹ 本研究は科研費（22510143）の助成を受けたものである。

2. CPPI を用いた動的資産配分法

本章では、リスク資産（株）と安全資産の2資産で構築されるポートフォリオに対して CPPI で動的資産配分を行う手法を説明する。

2.1 CPPI を用いた資産配分比率の決定手法

まず、投資開始時（0 時点）にポートフォリオの目標損失限度額であるフロア F_0 とレバレッジ乗数 m を設定する。任意の t 時点におけるフロア F_t は、投資開始時にフロア F_0 だけ安全資産に投資すれば、任意の t 時点では安全資産利子率 r で運用した価値となり、式(1)のように表される。

$$F_t = F_0 e^{rt} \quad (1)$$

次に、リスク資産に投資する金額を定める。リスク資産投資金額 E_t は、クッション C_t にレバレッジ乗数 m を乗じた金額であり、式(2)のように表され、 t 時点におけるリスク資産配分比率 W_t は式(3)で表される。

$$E_t = m C_t \quad (2)$$

$$W_t = \frac{E_t}{V_t} \quad (3)$$

ここでクッション C_t とは、ポートフォリオの価値 V_t からフロア F_t を差し引いた金額であり（式(4)）、フロア F_t からポートフォリオの価値 V_t までの余裕額を表している。

$$C_t = V_t - F_t \quad (4)$$

CPPI ではクッション C_t が 0 以上のときに限りリスク資産に投資することができる。仮に、ポートフォリオの価値 V_t がフロア F_t と等しくなる場合、式(4)よりクッション C_t が 0 になり、ポートフォリオの余裕額がなくなる。そのとき、設定したフロア F_t のポートフォリオの価値 V_t を確保するため、ポートフォリオの価値 V_t を全て安全資産に配分する。尚、全て安全資産となったポートフォリオの価値 V_t は、式(1)よりフロア F_t と同水準になり、以降クッション C_t が 0 以上になることはない。

2.2 CPPI のパラメータ設定によるポートフォリオの変化

CPPI のパラメータであるフロア F_0 とレバレッジ乗数 m によるポートフォリオの変化をまとめる。

式(4)より、フロア F_0 を低い値に設定すればクッション C_t が増え、レバレッジ乗数 m を大きくせずともリスク資産に多く投資可能になる。しかし同時に、フロア F_0 が低いと、最大損失額が増え、ダウンサイドリスクも大きくなる。逆に、フロア F_0 を高い値に設定すれば、最大損失額を抑えられ、ダウンサイドリスクを限定しやすいが、クッション C_t が減り、レバレッジ乗数 m を大きくしないとリスク資産に多く投資できない。しかし、レバレッジ乗数 m が大きすぎると、ポートフォリオの価値 V_t がフロア F_t に達する可能性が増える。このときポートフォリオは全て安全資産に切り替わり、その後株価が上昇した場合に機会損失が生じてしまうことになる。

以上より、フロア F_0 とレバレッジ乗数 m によって、リスク資産に投資する金額 E_t とフロア F_t に達する可能性が異なるため、ポートフォリオの期待リターンやボラティリティが異なる。よって、投資家のリスク選好ごとに最適なフロア F_0 とレバレッジ乗数 m を選択することが重要になる。

3. 投資家の効用

本章では、投資家の効用について説明する。投資家によって求める期待リターンや許容できるダウンサイドリスクの大きさは異なるため、投資家のリスク選好によってどのような CPPI が好まれるのか、

またそれは市場環境によって異なるのかを効用関数を用いて計量する。

3.1 効用関数

本研究で提案する効用関数は、投資終了時（ T 時点）のポートフォリオリターン R_T がマイナスの場合に式(5)を使用し、プラスの場合に式(6)を使用する。

$$U(R_T) = -\exp(-\gamma_- R_T) + 1 \quad (R_T \leq 0) \quad (5)$$

$$U(R_T) = \frac{1}{\gamma_+} R_T \quad (R_T > 0) \quad (6)$$

この効用関数は、マイナスリターンが大きくなるにつれ負の効用は逓増し、プラスリターンが大きくなるにつれ正の効用は線形的に大きくなることを示す。

3.2 投資家のリスク選好

リスク許容度 γ_- , γ_+ を組み合わせることで、3 種類の投資家を表現する。本研究で用いる投資家のリスク選好を表 1 に示す。

表 1 投資家のリスク選好

投資家	γ_-	γ_+	
選好1	9	0.12	最もリスク回避的な投資家
選好2	9	0.07	リスク回避的だが、ある程度リターンを要求する投資家
選好3	6	0.07	比較的リスクを許容できる投資家

4. シミュレーション分析

本章では、分析手法と結果について説明する。市場環境を表現する株価プロセスをシミュレーションにより発生させ、さまざまな市場環境下での CPPI を検証する。

4.1. シミュレーション手法

4.1.1 株価プロセスの発生

株価プロセスが幾何ブラウン運動に従うと仮定した場合、式(7)となる。

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (7)$$

ここで μ は株価の平均リターン、 σ はボラティリティ、 W_t は標準ブラウン運動であり、 S_t は t 時点における株価を表している。 μ と σ のパラメータセットごとに 10000 系列の株価プロセスを発生させる。表 2 に株価プロセスのパラメータを示す。

表 2 株価プロセスのパラメータ

$\mu\%$ (年率)	$\sigma\%$ (年率)
-30%~30% (1%刻み)	20%, 30%

4.1.2 CPPI のパラメータによるポートフォリオの構築

初期ポートフォリオを 100, フロア F_0 を 90~95 (0.5 刻み), レバレッジ乗数 m を 1~10 とすることで、

合計 110 種類の CPPI ポートフォリオを構築する。また、比較対象として、株式配分比率 W を一定に保ち続ける比率一定ポートフォリオを 10 種類構築する。比率一定ポートフォリオは、フロア F_0 を 0、レバレッジ乗数 m を 0.1~1 とすることで、株式配分比率 W が 10~100% となる。

4.2 分析項目と分析設定

本研究の分析項目は以下の 3 つである。

- (1) 各ポートフォリオのリターンから、市場環境と CPPI のパラメータの違いによるリターン分布を分析する。
- (2) 各ポートフォリオから得られる期待効用を計量し、CPPI のパラメータの違いによる市場環境に対する期待効用の変化を分析する。
- (3) 市場環境、投資家のリスク選好ごとに効用最大化となる CPPI のパラメータを分析する。

分析設定として、分析期間を 250 営業日、安全資産利子率は、0.1%(年率)とする。また、営業日毎に CPPI の資産配分法に沿ってポートフォリオのリバランスを行う。

4.3 シミュレーション分析結果と考察

分析項目(1)の結果を図 1~図 6 に示した。紙面の都合上、2 つの市場環境 (図 1~図 3 が安定期, 図 4~図 6 が混乱期), 初期株式配分比率 W_0 を 50% に統一した 3 種類のポートフォリオ (比率一定, CPPI ($F_0 = 90$), CPPI ($F_0 = 95$)) のみ示している。図の横軸はポートフォリオリターン, 縦軸は株価プロセスの系列数であり, CPPI のフロア F_T を実線で表している。

どちらの市場環境下においても, 図 1 と図 4 の比率一定ポートフォリオは, リターン分布の裾が広がっているが, 図 2~図 3, 図 5~図 6 の CPPI ポートフォリオは, それぞれフロアを設定することでダウンサイドリスクを限定できている。また, 市場環境の変化に合わせて資産配分比率を動的に変更することで期待リターンもある程度維持, 又は向上させている。これらの傾向は混乱期を想定している図 5, 図 6 のときにより顕著に確認できる。

以上より, 市場環境, CPPI のパラメータごとにリターン分布が異なっていることを確認した。このことから, 投資家ごとに効用が高いポートフォリオは異なると考えられる。よって, 分析項目(2), (3) において効用の観点から CPPI の分析を行う。

安定期; 株価プロセス ($\mu: 3\%, \sigma: 20\%$)

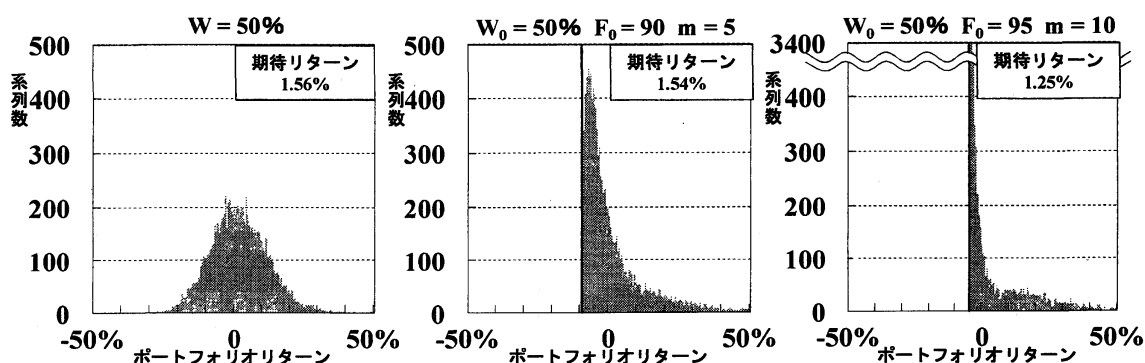


図 1 比率一定ポートフォリオ
リターン分布

図 2 CPPI ポートフォリオ
リターン分布 ($F_0 = 90$)

図 3 CPPI ポートフォリオ
リターン分布 ($F_0 = 95$)

混乱期；株価プロセス ($\mu: -3\%, \sigma: 30\%$)

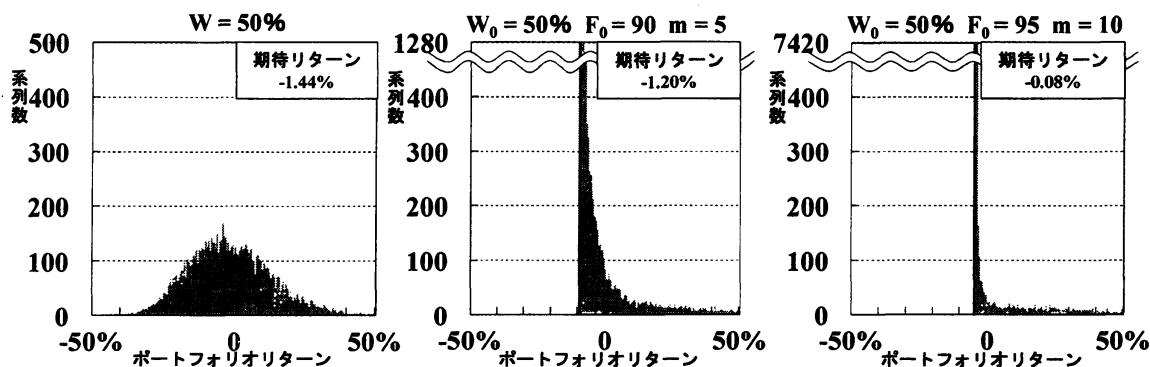


図4 比率一定ポートフォリオリターン分布

図5 CPPIポートフォリオリターン分布 ($F_0 = 90$)

図6 CPPIポートフォリオリターン分布 ($F_0 = 95$)

分析項目(2)の結果を図7、図8に示した。紙面の都合上、分析項目(1)と同じポートフォリオを取り出した上で、市場環境に対する選好3の期待効用の変化を確認する。図の横軸は株価プロセスの平均リターン μ 、縦軸は選好3の期待効用である。

平均リターン μ が負の場合、ボラティリティ σ の大きさによらず平均リターン μ の低下に対する期待効用の減少を抑えている。これはフロア F_0 によりダウンサイドリスクを限定できるためだと考えられる。一方で平均リターン μ が正の場合、ボラティリティ σ の大きさごとに結果が異なる。ボラティリティ σ が小さい場合(図7、 $\sigma: 20\%$ 一定)、CPPIのパラメータに関わらず、平均リターン μ の上昇に対しCPPIポートフォリオの期待効用は増加していく。しかし、ボラティリティ σ が大きい場合(図8、 $\sigma: 30\%$ 一定)、図7と比べCPPIポートフォリオ ($m=10$) の期待効用があまり増加しない。これはボラティリティ σ に対し、レバレッジ乗数 m が大きすぎるため、ポートフォリオの価値 V_t がフロア F_t に達し、安全資産のみになったポートフォリオが多いことが原因と推測できる。つまり、その後株価が上昇した場合に機会損失が生じてしまい、効用があまり増加しない結果となったと考えられる。

以上より、市場環境に対する選好3の期待効用の変化を確認した。値上がる場合の収益機会を維持するためには、市場環境に対し適切なレバレッジ乗数 m を設定する必要があるといえる。

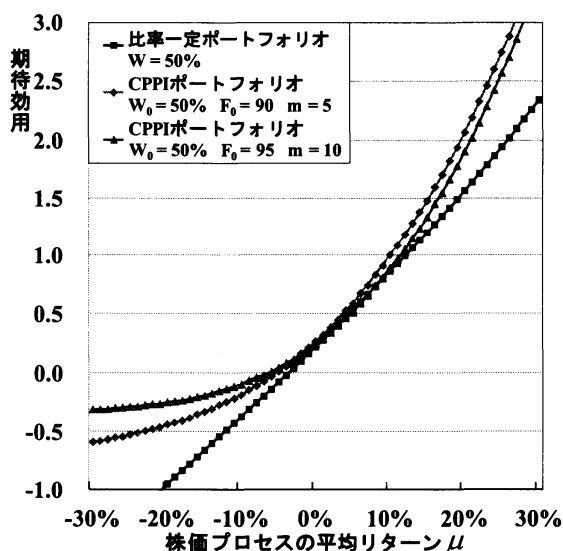


図7 市場環境 ($\sigma: 20\%$ 一定) と期待効用(選好3)

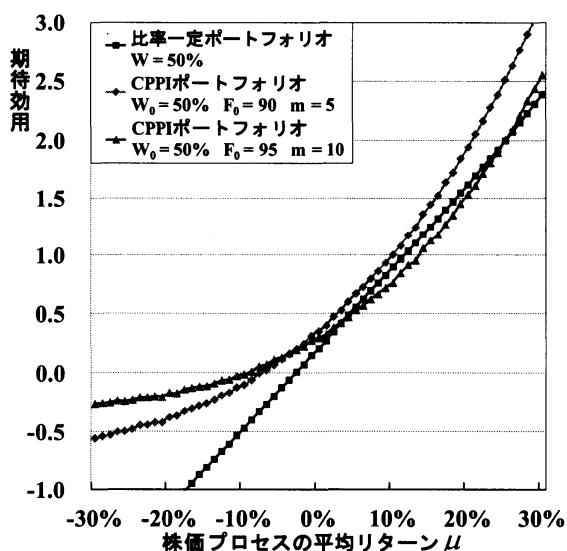


図8 市場環境 ($\sigma: 30\%$ 一定) と期待効用(選好3)

最後に、分析項目(3)の結果を図9、図10に示した。ここでは、2つの市場環境（安定期、混乱期）の下でそれぞれの投資家にとって効用最大化となるCPPIのパラメータを検証する。図の $x-y$ 平面上の点はCPPIのパラメータであるフロア F_0 とレバレッジ乗数 m のセットを表し、フロア $F_0=0$ は、比率一定ポートフォリオである。また、 z 軸の高さはパラメータセットに対する期待効用を表している。

安定期を想定している図9の場合、最もリスク回避的な選好1はダウンサイドリスクの限定を最優先にしているため、最大損失額を抑えるためにフロア F_0 を高く設定した上でレバレッジ乗数 m を調節し、高い効用を得ていると考えられる。しかし、リターンをある程度求める選好2になると、期待効用が高いポートフォリオが図の左下に寄っていくことが確認できる。つまり、フロア F_0 を低くし、ポートフォリオの価値 V_t がフロア F_t に達する可能性を抑えた上で、レバレッジ乗数 m を大きくすることで、高いリターンを求めることになる。また、リスクをある程度許容出来る選好3では比率一定ポートフォリオとCPPIポートフォリオの効用がほぼ等しく、CPPIの有用性はそれほど大きくないといえる。一方、混乱期を想定している図10の場合、リスク回避的な選好1は全てのポートフォリオの効用が負になっており、混乱期においては株に投資するべきではないと考えている。しかし、選好2、3ではCPPIを利用し高いフロアを設定することで混乱期でもダウンサイドリスクを限定しつつ、高いリターンの収益機会を望んでいることが分かる。また、選好3では安定期の場合と異なり、比率一定ポートフォリオの効用が負になることから、比率一定ポートフォリオの有用性が低いことが確認できる。

以上より、投資家のリスク選好ごとに、2つの市場環境における最適なCPPIのパラメータを確認した。期待効用の結果から、リスク回避的な選好1は安定期に、リスクをある程度許容できる選好3は混乱期にCPPIの有用性が強く現れるといえる。

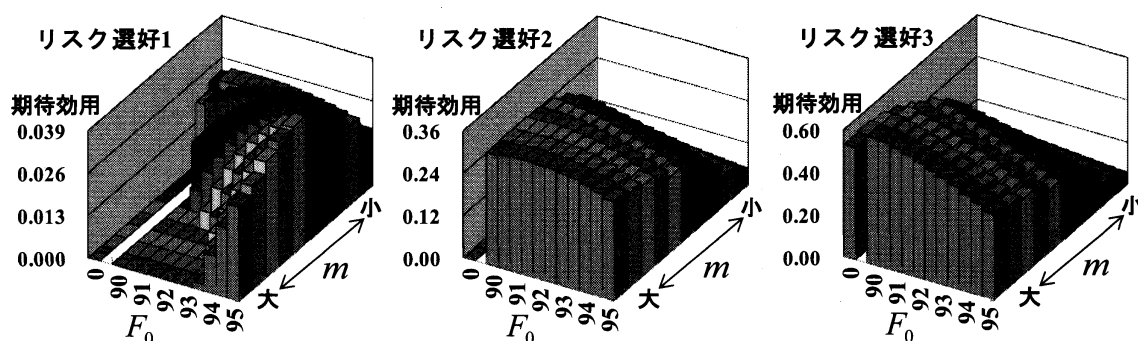


図9 投資家のリスク選好ごとの期待効用 安定期；株価プロセス($\mu: 3\%, \sigma: 20\%$)

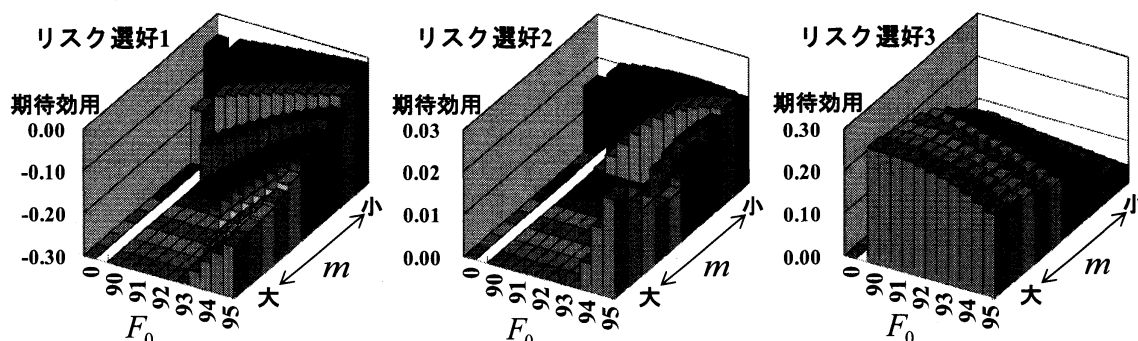


図10 投資家のリスク選好ごとの期待効用 混乱期；株価プロセス($\mu: -3\%, \sigma: 30\%$)

5. まとめと結語

本研究では、PIの代表的手法であるCPPIのシミュレーション分析を行った。そして、投資家の効用に注目し、市場環境、CPPIのパラメータ、投資家のリスク選好の違いといった観点から投資家のリスク選好ごとに効用最大化となるCPPIについて検証した。

CPPIポートフォリオのリターン分布を検証した結果、市場環境に関わらず、ポートフォリオのダウンサイドリスクを限定できることを確認した。これはボラティリティが大きい場合でも同様であり、CPPIは市場が混乱している中で特に効果を発揮するといえる。また、ポートフォリオの値上がる可能性もある程度維持可能だが、市場環境とレバレッジ乗数の大きさの関係によってはポートフォリオの価値がほぼフロアと等しくなることを確認した。また、CPPIから得られる効用に注目した結果、リスク回避的な投資家にとっては、安定期においてCPPIの有用性が高まり、リスクをある程度許容できる投資家にとっては、混乱期においてCPPIの有用性が高まることを確認した。

以上より、ダウンサイドリスクを限定しつつリターンを維持することを目的とし、ポートフォリオを運用する場合、CPPIは有用な資産配分法であるといえる。しかし、PIの目的を十分に達成するためには、資産価格の変動をある程度予想した上で、適切なCPPIのパラメータ設定を行うことが重要になる。また、最適なCPPIのパラメータはポートフォリオから得られる効用を計量することで選択できるが、そのパラメータは投資家のリスク選好ごとに大きく異なる。よって、CPPIを用いてポートフォリオを運用する場合は投資家のリスク選好を把握することが重要である。

参考文献

- [1] Black, F. and R.Jones (1987), "Simplifying portfolio insurance," *Journal of Portfolio Management*, 14, 48-51.
- [2] Cesari, R. and D.Cremonini (2003), "Benchmarking portfolio insurance and technical analysis: a Monte Carlo comparison of dynamic strategies of asset allocation," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 987-1011.
- [3] Ho, L.C., J.Cadle and M.Theobald (2008), "An analysis of risk-based asset allocation and portfolio insurance strategies," Working paper, Central Bank of the Republic of China (Taiwan).
- [4] Ho, L.C., J.Cadle and M.Theobald (2010), "Portfolio Insurance Strategies: Review of Theory and Empirical Studies," *Handbook of Quantitative Finance And Risk Management*, Part II, 319-332.
- [5] Leland H.E. and M.Rubinstein (1976), "The evolution of portfolio insurance," *Dynamic Hedging: A Guide to Portfolio Insurance*, Wiley.
- [6] Pain, D. and J.Rand (2008), "Recent developments in portfolio insurance," *Bank of England Quarterly Bulletin* Q1, 37-46.
- [7] Perold, A. (1986), "Constant proportion portfolio insurance," Harvard Business School Report.
- [8] Perold, A.R. and W.F.Sharpe (1988), "Dynamic strategies for asset allocation," *Financial Analysts Journal*, 44(1), 16-27.
- [9] Rendleman, R.J.Jr. and T.J.O'Brien (1990), "The effects of volatility misestimation on option-replication portfolio insurance," *Financial Analysts Journal*, 46(3), 61-70.
- [10] Zhao, Y. and W.T.Ziamba (2000), "A dynamic asset allocation model with downside risk control," *Journal of Risk*, 3(1), 91-113.
- [11] Zhu, Y. and R.C.Kavee (1988), "Performance of portfolio insurance strategies," *Journal of Portfolio Management*, 14(3), 48-54.